物理問題 I

(1)

$\boxed{ア}$ br $\boxed{イ}$ ①

解説

等速円運動の運動方程式は，円運動の中心方向の運動方程式であり，
物体が受ける円運動の中心方向の外力はばねの弾性力による。

よって，$\dfrac{mv^2}{r} = br$ $\therefore br$ ・・・$\boxed{ア}$

また，$\dfrac{mv^2}{r} = br$ より，$mv^2 = br^2$ $\therefore \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}br^2$

ゆえに，$K = V$ ∴① ・・・$\boxed{イ}$

(2)

$\boxed{ウ}$ $br\cos\alpha - D$ $\boxed{エ}$ $br\Delta r$

解説

微小時間の仕事＝瞬間の仕事

Δr は微小だから，ばねが物体を引く力の大きさは br で一定としてよい。
よって，ばねの力が物体の運動方向にする仕事は $br\Delta s\cos\alpha$
また，摩擦力が物体の運動方向にする仕事は $D\Delta s\cos 180° = -D\Delta s$
ゆえに，これら 2 力がする仕事の和は $(br\cos\alpha - D)\Delta s$ $\therefore br\cos\alpha - D$ ・・・$\boxed{ウ}$
ばねの力による仕事＝ $br\Delta s\cos\alpha$
＝ $br\Delta r$ ・・・$\boxed{エ}$

$\boxed{オ}$ ② $\boxed{カ}$ $-Dv\Delta t$ $\boxed{キ}$ $\dfrac{1}{2}$

解説

$\Delta V = -br\Delta r$ より，$br\Delta r = -1\times\Delta V$ ∴② ・・・$\boxed{オ}$
摩擦力による仕事＝ $-D\Delta s = -Dv\Delta t$ ・・・$\boxed{カ}$
また，$\Delta K = br\Delta r - Dv\Delta t$，$\Delta V = -br\Delta r$ より，
Δt の間に生じる力学的エネルギー変化 $\Delta E = \Delta K + \Delta V = -Dv\Delta t$
よって，Δt の間に生じる力学的エネルギー変化は摩擦力による仕事によるとしてよい。

補足

摩擦力は非保存力だから「力学的エネルギー変化＝摩擦力による仕事」 $\therefore \Delta E = -Dv\Delta t$

$V = K$，$V + \Delta V = K + \Delta K$ より $\Delta V = \Delta K$

よって，$\Delta E = \Delta K + \Delta V = 2\Delta K$ $\therefore \Delta K = \dfrac{1}{2}\Delta E = \dfrac{1}{2}(-Dv\Delta t)$ $\therefore \dfrac{1}{2}$ ・・・$\boxed{キ}$

(3)

$\boxed{ク}$ $-\dfrac{D}{2m}$ $\boxed{ケ}$ $v_0-\dfrac{D}{2m}t$

解説

(ⅱ)より， $\Delta K=-\dfrac{1}{2}Dv\Delta t$

これと $\Delta K=mv\Delta v$ より， $mv\Delta v=-\dfrac{1}{2}Dv\Delta t$ $\therefore \dfrac{\Delta v}{\Delta t}=-\dfrac{D}{2m}$ ・・・$\boxed{ク}$

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ は加速度を表しているから， $v(t)=v_0+\dfrac{\Delta v}{\Delta t}t=v_0-\dfrac{D}{2m}t$ ・・・$\boxed{ケ}$

(4)

$\boxed{コ}$ ④

解説

$\dfrac{mv^2}{r}=\dfrac{GMm}{r^2}$ より， $\dfrac{1}{2}mv^2=-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{GMm}{r}\right)$ $\therefore K=-\dfrac{1}{2}V$ $\therefore 2K=-V$

問 1

運動エネルギー変化は，抵抗力がした仕事と万有引力がした仕事の和で与えられるから，

$$\Delta K=-Dv\Delta t+\frac{GMm}{r^2}\Delta r$$

これと位置エネルギー変化 $\Delta V=-\dfrac{GMm}{r^2}\Delta r$ より，

人工衛星の力学的エネルギー変化 ΔE は，

$$\begin{aligned}\Delta E&=\Delta K+\Delta V\\&=\left(-Dv\Delta t+\frac{GMm}{r^2}\Delta r\right)+\left(-\frac{GMm}{r^2}\Delta r\right)\\&=-Dv\Delta t\end{aligned}$$

となる。

よって，この場合においても式(ⅰ)が成り立つ。

解説

万有引力がした仕事は$\boxed{エ}$から $\dfrac{GMm}{r^2}\Delta r$

問 2

$2(K+\Delta K)=-(V+\Delta V)$ より，$2\Delta K=-\Delta V$

よって，$\Delta E=\Delta K+\Delta V=\Delta K+(-2\Delta K)=-\Delta K$

また，問 1 より，$\Delta E=-Dv\Delta t$

よって，$\Delta K=Dv\Delta t$

また，

$$\begin{aligned}\Delta K&=\frac{1}{2}m(v+\Delta v)^2-\frac{1}{2}mv^2\\&=mv\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2\end{aligned}$$

$(\Delta v)^2$ は 0 とみなしてよいから，

$\Delta K=mv\Delta v$ とも表せる。

したがって，$mv\Delta v=Dv\Delta t$　$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{D}{m}$

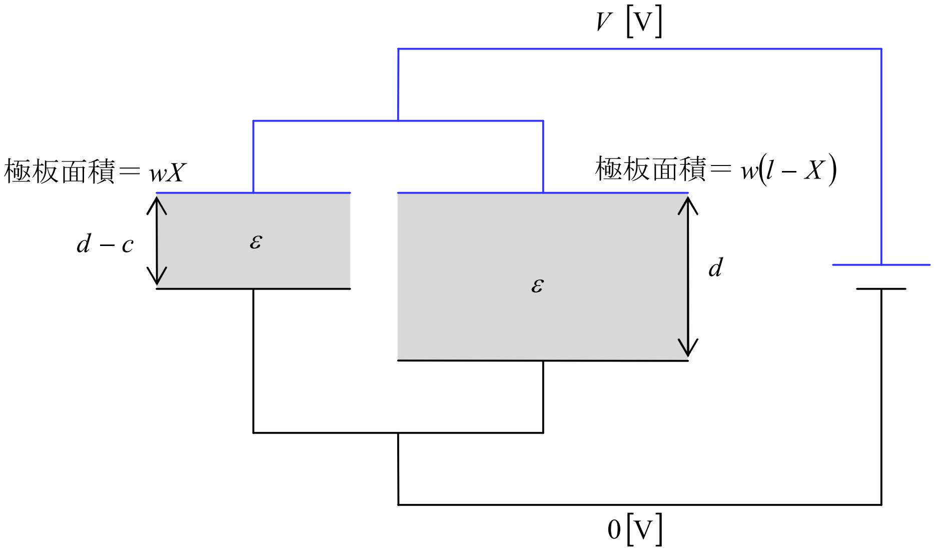
$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ は加速度を表しており，$D>0$ より，$\frac{\Delta v}{\Delta t}>0$ となるから，人工衛星は加速される。

物理問題　II

$\boxed{イ}$ $\dfrac{\varepsilon wV^2(dl-cl+cX)}{2d(d-c)}$

解説

金属板は導体だから，図 2 は下図のコンデンサーの並列回路と同じである。



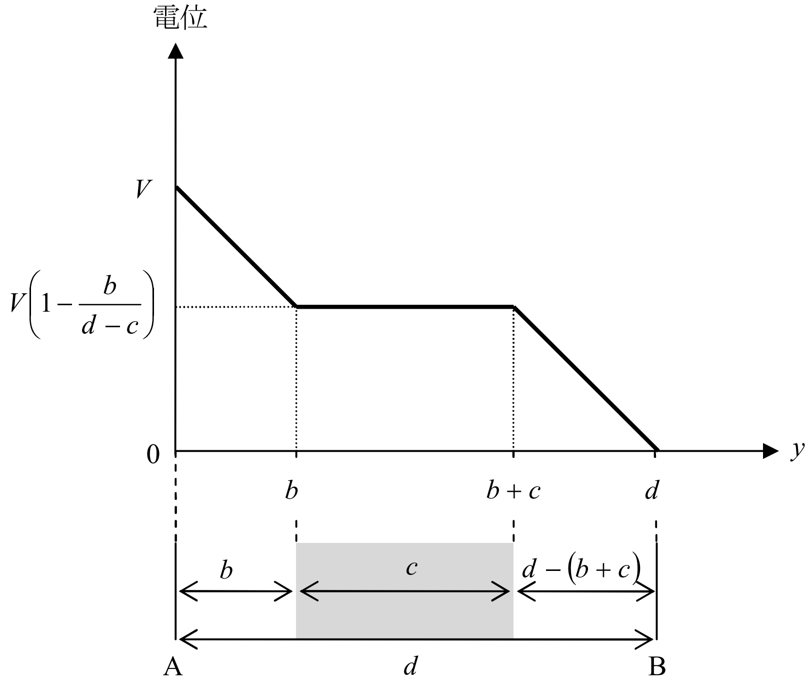
コンデンサーの合成容量を C_T とすると，

$$
\begin{aligned}
C_T &= \frac{\varepsilon wX}{d-c}+\frac{\varepsilon w(l-X)}{d} \\
&= \frac{\varepsilon w(dl-cl+cX)}{d(d-c)} \\
&= \frac{\varepsilon w}{d}\left(l+\frac{c}{d-c}X\right)
\end{aligned}
$$

よって，コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは

$$\frac{1}{2}C_T V^2 = \frac{\varepsilon wV^2}{2d}\left(l+\frac{c}{d-c}X\right)$$

ロ



解説

気体中の電界の強さをEとすると，

Eは極板間隔が$d-c$，電圧がVのコンデンサーのそれと等しいから，$E=\dfrac{V}{d-c}$

$y=b+c$の電位

$y=d$（極板 B）と$y=b+c$間の距離は$d-(b+c)$だから，

$y=b+c$の電位は$y=d$（極板 B，電位 0）のそれより$E\{d-(b+c)\}$だけ高い。

よって，$y=b+c$の電位は$0+E\{d-(b+c)\}=\dfrac{V}{d-c}\{(d-c)-b\}=V\left(1-\dfrac{b}{d-c}\right)$

$b\le y\le b+c$の電位

導体は等電位だから，$V\left(1-\dfrac{b}{d-c}\right)$

※ 導体中の電場の強さは 0 だから，電位は変化しない。

ハ $\dfrac{\varepsilon E^2}{2}$

解説

コンデンサーの電気容量は，イの極板の間隔dのコンデンサーと同じだから，$\dfrac{\varepsilon w(l-X)}{d}$

これと$V=Ed$より，静電エネルギーは，$\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon w(l-X)}{d}(Ed)^2=\dfrac{\varepsilon E^2}{2}\times wd(l-X)$

$\boxed{ニ}$ 0

解説

金属板内の電場の強さは 0 だから，$\boxed{ハ}$より，蓄えられる静電エネルギーは 0 である。

$\boxed{ホ}$ $\dfrac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X$　$\boxed{ヘ}$ 2　$\boxed{ト}$ ΔX　$\boxed{チ}$ ①

解説

静電エネルギー変化

$\boxed{イ}$より，$\dfrac{\varepsilon wV^2}{2d}\left\{l+\dfrac{c}{d-c}(X+\Delta X)\right\}-\dfrac{\varepsilon wV^2}{2d}\left(l+\dfrac{c}{d-c}X\right)=\dfrac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X$　・・・$\boxed{ホ}$

電池がする仕事

静電エネルギー変化＝$\dfrac{1}{2}(C_{\mathrm{T}}+\Delta C_{\mathrm{T}})V^2-\dfrac{1}{2}C_{\mathrm{T}}V^2=\dfrac{1}{2}\Delta C_{\mathrm{T}}V\cdot V=\dfrac{1}{2}\Delta QV$

電池がする仕事＝$(Q+\Delta Q)V-QV=\Delta QV$ より，

電池がする仕事は静電エネルギー変化の 2 倍

すなわち $2\times\dfrac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X$　$\therefore 2$ ・・・$\boxed{ヘ}$

静電気力の x 軸に平行な成分の大きさと向き

外力の x 軸に平行な成分がした仕事を W とすると，

静電エネルギー変化＝電池がした仕事＋W より，

$$\frac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X=2\times\frac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X+W$$

$$\therefore W=-\frac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X$$

$$=\frac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\Delta X\cos 180^\circ$$

ゆえに, 外力の x 軸に平行な成分の大きさは $\dfrac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}$ でその方向は x の負方向である。

静電気力の x 軸に平行な成分と外力の x 軸に平行な成分はつり合いの関係にあるから,

その大きさは $\dfrac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}$ すなわち$\boxed{ホ}\div\Delta X$　・・・$\boxed{ト}$となる。

また，その方向は x の正方向である。　・・・$\boxed{チ}$

問 1

静電気力の y 軸に平行な成分の大きさ：0

理由

金属板を y 軸方向に移動させてもコンデンサーの電気容量は変化しないから，

コンデンサーに蓄えられていた電荷は変化しない。

したがって，コンデンサーの静電エネルギー変化も電池がする仕事も 0 である。

よって，エネルギーと仕事の関係から，外力が静電気力の y 軸に平行な成分に対してした仕事も 0 である。ゆえに，静電気力の y 軸に平行な成分は 0 である。

$\boxed{\text{リ}}$ 2.7×10^{-3}

解説

$$
\begin{aligned}
F_x &= \frac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)} \\
&= \frac{8.9\times10^{-12}[\mathrm{F/m}]\cdot 20\times10^{-3}[\mathrm{m}]\cdot 3.0\times10^{-3}[\mathrm{m}]\cdot\left(10\times10^{3}[\mathrm{V}]\right)^2}{2\cdot 5.0\times10^{-3}[\mathrm{m}]\left(5.0\times10^{-3}-3.0\times10^{-3}\right)[\mathrm{m}]} \\
&= 2.67\times10^{-3}[\mathrm{N}] \\
&\approx 2.7\times10^{-3}[\mathrm{N}]
\end{aligned}
$$

問 2

静電遮蔽により，金属箱内部の電界は 0 となるので，金属板を入れた場合と同じである。

よって，金属箱に働く静電気力の x 軸および y 軸に平行な成分は金属板のそれと等しい。

物理問題　Ⅲ

$\boxed{\text{あ}}$ $\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$　$\boxed{\text{い}}$ $0 = Mv - \frac{hf_1}{c}$

解説

原子核が励起状態（内部エネルギー E_e）から基底状態（内部エネルギー E_g）に移るときに，振動数 f_1 の γ 線の光子が 1 個放出され，静止していた原子核は γ 線放射の反作用により速さ v で動き出すから，

エネルギー保存則は，$E_e = E_g + \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$ より，$\Delta E = E_e - E_g = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$

$\therefore \Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$　・・・$\boxed{\text{あ}}$

運動量保存則は，はじめの運動量＝0，$Mv > 0, \frac{hf_1}{c} > 0$ より，$0 = Mv - \frac{hf_1}{c}$　・・・$\boxed{\text{い}}$

補足　$E = hf$，$E = mc^2$ より，運動量 $p = mc = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$

$\boxed{\text{う}}$ $\frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$

解説

$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$ から v を消去した f_1 についての方程式をつくり，これを解けばよい。

$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$ より，$M^2v^2 = 2M\Delta E - 2Mhf_1$

$0 = Mv - \frac{hf_1}{c}$ より，$M^2v^2 = \frac{h^2 f_1^2}{c^2}$

よって，$\frac{h^2 f_1^2}{c^2} = 2M\Delta E - 2Mhf_1$　すなわち $h^2 f_1^2 + 2Mhc^2 f_1 - 2Mc^2\Delta E = 0$

$$\therefore f_1 = \frac{-Mhc^2 + \sqrt{M^2h^2c^4 + 2Mc^2h^2\Delta E}}{h^2}$$

$$= \frac{-Mhc^2 + Mhc^2\sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}}}{h^2}$$

ここで，$2\Delta E << Mc^2$ より，$\sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\Delta E}{Mc^2} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2\Delta E}{Mc^2}\right)^2$

ゆえに，$f_1 \approx \frac{-Mhc^2 + Mhc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\Delta E}{Mc^2} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2\Delta E}{Mc^2}\right)^2\right\}}{h^2} = \frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$

$\boxed{\text{え}}$ $\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2NMc^2}\right)$

解説

$f_1=\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$ の f_1 を f_N に，M を NM に置き換えて，$f_N=\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2NMc^2}\right)$

問 1

エネルギー保存則より，$\Delta E=\dfrac{1}{2}NMv_N{}^2+hf_N$ ・・・①

運動量保存則より，$0=NMv_N-\dfrac{hf_N}{c}$ $\therefore v_N=\dfrac{hf_N}{cNM}$ ・・・②

①，②より，$\Delta E=\dfrac{1}{2}NM\left(\dfrac{hf_N}{cNM}\right)^2+hf_N$ すなわち $f_N=\dfrac{\Delta E}{h}-\dfrac{(hf_N)^2}{2hc^2NM}$

よって，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}f_N=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\Delta E}{h}-\frac{(hf_N)^2}{2hc^2NM}\right\}=\frac{\Delta E}{h}=f_\infty$

これと $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\Delta E}{h}-\frac{(hf_N)^2}{2hc^2NM}\right\}=\frac{\Delta E}{h}=f_\infty$ より，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}f_N=f_\infty$

$\boxed{\text{お}}$ $c+A\omega\sin\omega t$

解説

吸収体の速度を v_x とすると，$f_{\mathrm{d}}=\dfrac{c-v_x}{c}f_N$ $\therefore \dfrac{f_{\mathrm{d}}}{f_N}=\dfrac{c-v_x}{c}$

ここで，$x=A\cos\omega t$ より，$v_x=-A\omega\sin\omega t$

よって，$\dfrac{f_{\mathrm{d}}}{f_N}=\dfrac{c+A\omega\sin\omega t}{c}$

補足

「単位時間当りに吸収体に到達する波の数が $\dfrac{V}{\lambda}$ だけ変化する」について

$\dfrac{f_{\mathrm{d}}}{f_N}=\dfrac{c\pm V}{c}$，$c=f_N\lambda$ より，

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{d}}&=\left(1\pm\frac{V}{c}\right)f_N\\&=f_N\pm\frac{f_N}{c}V\\&=f_N\pm\frac{V}{\lambda}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{か}}$ $\dfrac{\Delta E}{2NMcA\omega}$　$\boxed{\text{き}}$ 0.6

解説

$$\frac{f_\infty}{f_N}=\frac{c+A\omega\sin\omega t_1}{c}$$
$$=1+\frac{A\omega}{c}\sin\omega t_1$$

$f_N=\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2NMc^2}\right)$,　$f_\infty=\dfrac{\Delta E}{h}$ より,

$$\frac{f_\infty}{f_N}=\frac{1}{1-\dfrac{\Delta E}{2NMc^2}}$$
$$\approx 1+\frac{\Delta E}{2NMc^2}$$

よって,　$\dfrac{A\omega}{c}\sin\omega t_1\approx\dfrac{\Delta E}{2NMc^2}$　$\therefore\sin\omega t_1=\dfrac{\Delta E}{2NMcA\omega}$　・・・$\boxed{\text{か}}$

$\sin\omega t_1=\dfrac{\Delta E}{2NMcA\omega}=\dfrac{\Delta E}{2N\cdot\dfrac{Mc^2}{c}\cdot A\omega}$ に与えられた数値を代入すると,

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2\times10^{-14}}{2\cdot10^4\cdot\dfrac{1\times10^{-8}}{3\times10^8}\cdot0.1\cdot\omega}=\frac{0.3}{\omega}$$

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ より,　$\dfrac{0.3}{\omega}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\omega=0.6$　・・・$\boxed{\text{き}}$

$\boxed{\text{く}}$ ③

問 2

吸収体が観測する振動数が f_∞ のとき，測定器で観測される γ 線強度が 0 になる。

吸収体が観測する振動数が f_∞ になるのは,

$f_{\mathrm{d}}=\dfrac{c-v_x}{c}f_N=\dfrac{c-A\omega\sin\omega t}{c}f_N$ において, $\boxed{\text{か}}$より，ωt が $\sin\omega t=\dfrac{1}{2}$ を満たすときだから,

$$\omega t=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって,　$\omega t=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi$ のとき γ 線強度が 0 になるグラフとなる。